Movimento elíptico planetário: distribuição de áreas e tempo orbital

Nícolas Fausto Ribeiro, 16 de janeiro de 2024

Campina Grande, Paraíba, Brasil

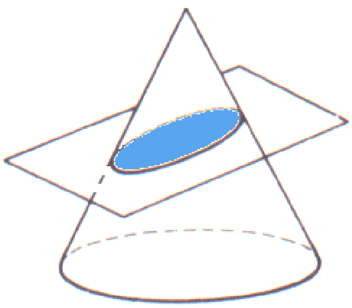
keywords – elipse, Geometria analítica, Astronomia, Física, Kepler, áreas, Leis de Kepler, período orbital, mecânica celeste

Introdução

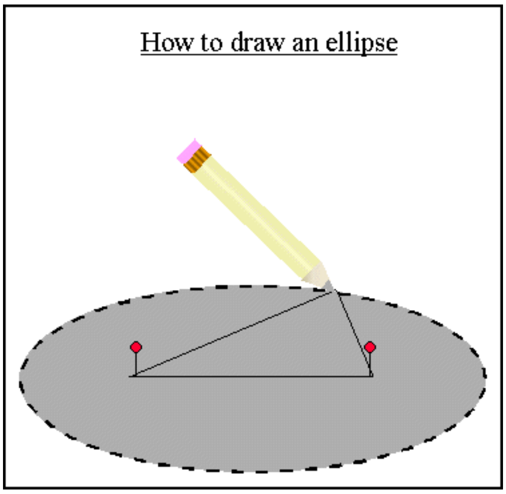
O desenvolvimento físico-matemático da Astronomia foi exponencialmente otimizado na Idade Moderna europeia – nomes como Tycho Brahe (1546-1601), Isaac Newton (1643-1727), Nicolau Copérnico (1473-1543) e Johannes Kepler (1571-1630) estão como os principais responsáveis pela compreensão do funcionamento do *cosmos*. Neste artigo, a apresentação das Leis de Kepler é fundamental, sem desconsiderar as demais contribuições dos astrônomos e geômetros. René Descartes (1596-1650) “fundou” a Geometria analítica com a ideia do plano cartesiano; neste segmento geométrico está o estudo das **elipses**, elementos planos presentes na órbita dos planetas conforme descreve a 1° Lei de Kepler. Com o avanço do cálculo integral, a determinação das áreas parciais elípticas se torna mais precisa – algo aplicável no estudo das órbitas parciais, sendo estas o foco do trabalho. A relação entre elementos elípticos e dados astronômicos permite usar a Matemática e Física para especificar o movimento planetário abordado.

1. Elementos e definição de uma elipse

A elipse é uma figura geométrica extraída de uma seção cônica:



A construção de uma elipse também pode ser feita com a analogia do barbante:



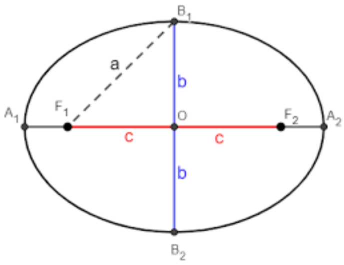
Os dois pontos fixos são chamados de **focos da elipse**. Por definição de elipse, a distância euclidiana entre os focos é igual a **2c**. A soma dos raios da elipse é igual a **2**a e são representados pelos lados móveis no barbante, enquanto **2b** é a distância entre as duas extremidades do eixo y da elipse, perpassando o centro da elipse.

➔ A equação simplificada da elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

➔ A relação entre a,b,c é:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



➔ A excentricidade da elipse é dada por: e = c/a, 0 < e < 1.

2. Associação entre elipses e Leis de Kepler

A **1° Lei de Kepler**, a **Lei das Órbitas,** afirma que "A órbita dos planetas é uma elipse, com o Sol ocupando um dos focos". Assim, o planeta percorre todo o perímetro elíptico, e a distância mínima entre o Sol e o planeta – o periélio – é dado por **a-c,** enquanto o afélio mantém distante o sistema Sol-Planeta por **a+c.** Atualmente, sabese que **as Leis de Kepler são universais,** logo o corpo central pode ser ocupado por qualquer estrela ou planeta conhecidos, ambos pertencendo a um mesmo sistema.

As propriedades geométricas elípticas podem ser convertidas para novas nomenclaturas astronômicas. O **raio médio,** denotado por **R**, é dado pela média aritmética dos raios – sua soma é igual a **2a,** logo **a** corresponde a **R**. Com esta substituição, é possível calcular **c** utilizando a fórmula da excentricidade:

e = c/a → e = c/R → **c = Re**

Determinando **a** e **c**, **b** pode ser calculado usando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \quad R^2 = b^2 + R^2e^2$$

$$\boldsymbol{b = R\sqrt{1 - e^2}}$$

Reescrevendo a equação da elipse:

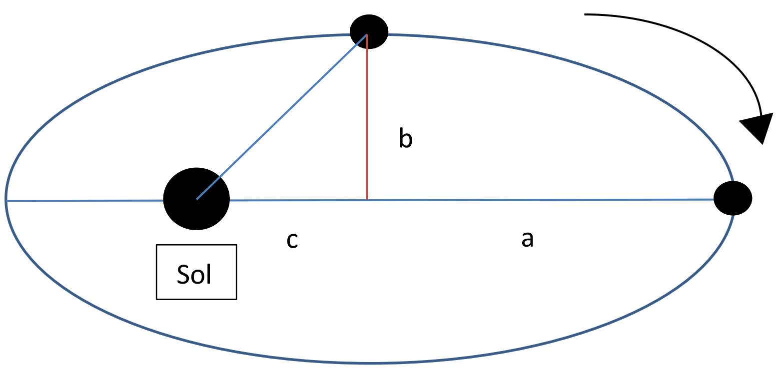
$$\boldsymbol{\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2(1 - e^2)} = 1}$$

Na **2° Lei de Kepler**, a **Lei das Áreas**, há a relação entre área "varrida" pelo planeta e o tempo orbital: "Planetas varrem áreas iguais em tempos iguais". De forma alternativa, **as áreas varridas são diretamente proporcionais ao tempo.**

É possível criar **setores de áreas** para compreender esta relação, considerando a proporção entre **áreas** e, consequentemente, entre **tempos orbitais.**

1° Área especial

- O planeta está alinhado com o centro da elipse e orbita em direção ao afélio:



A área varrida é dada pela soma da área do triângulo e o quarto de elipse.

Logo: $\frac{bc}{2} + \frac{ab\pi}{4}$, a = R, b = $R\sqrt{1 - e^2}$, c = Re → $\frac{R^2e\sqrt{1-e^2}}{2} + \frac{\pi R^2\sqrt{1-e^2}}{4}$

Sabendo que o tempo para percorrer metade da área corresponde à metade do tempo, qual o tempo necessário para percorrer a área especial?

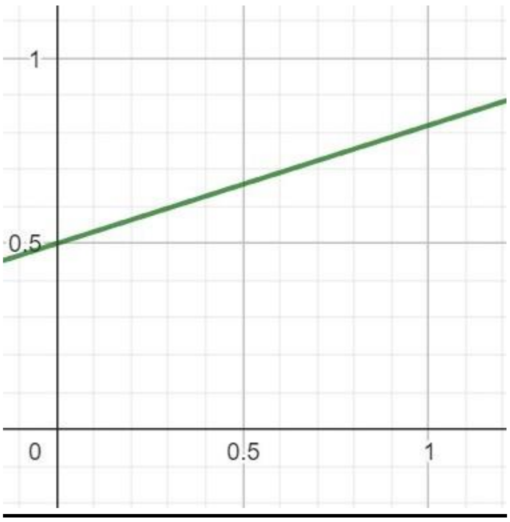
Área da semielipse: $\frac{\pi R^2\sqrt{1-e^2}}{2}$

Área especial: $\frac{R^2\sqrt{1-e^2}(2e+\pi)}{4}$

Áreas	Tempo
$\frac{\pi R^2\sqrt{1-e^2}}{2}$	t/2
$\frac{R^2\sqrt{1-e^2}(2e+\pi)}{4}$	x

$\frac{2\pi}{2e+\pi} = \frac{t}{2x} \rightarrow x = \frac{t}{2} \cdot \frac{2e+\pi}{2\pi}$ → "porcentagem" do tempo

$$f(e) = \frac{e}{\pi} + 1/2,$$ 0 < e < 1

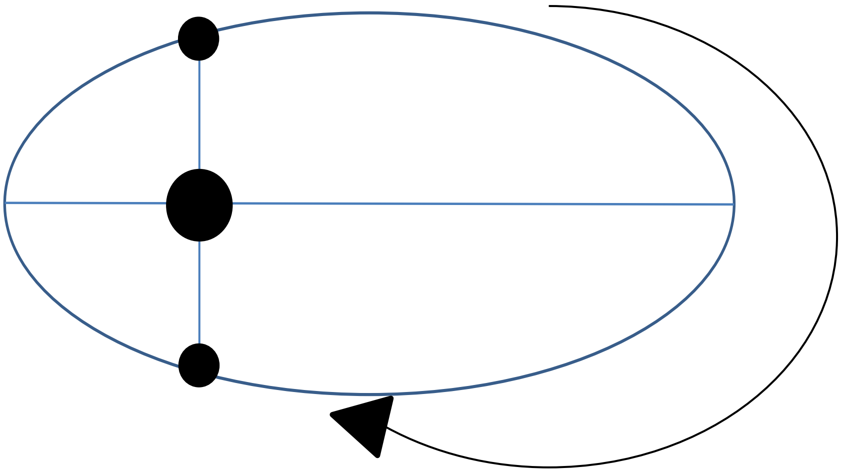


Exemplo 1: Qual a porcentagem de tempo do planeta Mercúrio na "área especial 1"? Excentricidade: 0.21 → 56,6%

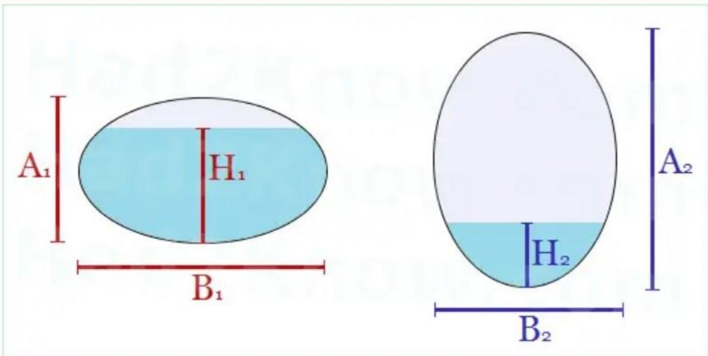
Exemplo 2: Qual a porcentagem de tempo do planeta Marte na "área especial 1"? Excentricidade: 0.09 → 52,8%

2° Área especial

- ➔ As áreas especiais perpassam o “Sol”.



Estes segmentos são chamados de ‘tanques elípticos’. Por meio do cálculo integral, a área parcial é dada por:



If the height of the tank is **A**, the width of the tank **B**, and the height of the elliptical segment **h** then the area of the segment is given by the equation:

area = (**AB**/4)[arccos(1 - 2**h**/**A**) - (1 - 2**h**/**A**)sqrt(4**h**/**A** - 4**h**^{2}/**A**^{2})],

sendo A = 2a, B = 2b, arco cosseno em radianos e **h** a distância relacionada a 2a.

- Cálculo da área menor (vermelha)

- Como a área menor possui **h** como o afélio, seu valor passa a ser **a-c.**

→ a = R

→ b = R$\sqrt{1-e^2}$

→ c = Re

$$\frac{\cancel{2R}.2R\sqrt{1-e^2}}{\cancel{4}}(\arccos\left(1-\frac{\cancel{2}.R(1-e)}{\cancel{2R}}\right).\left(1-\frac{\cancel{2}.R(1-e)}{\cancel{2R}}\right)\sqrt{\frac{\cancel{4}.R(1-e)}{\cancel{2R}}-\frac{4.\cancel{R^2}(1-e)^2}{\cancel{4R^2}}})$$

$$R^2\sqrt{1-e^2}(\arccos e - e\sqrt{2-2e-(1-2e+e^2)} \rightarrow R^2\sqrt{1-e^2}(\arccos e - e\sqrt{1-e^2})$$

- Cálculo da área maior (amarela)

➔ Apenas calcular a área total e subtrair da área menor:

$$ab\pi - ab(\arccos e - e\sqrt{1-e^2}) \rightarrow R^2\sqrt{1-e^2}(\pi - \arccos e + e\sqrt{1-e^2})$$

- Cálculo das porcentagens de tempo e área dos “tanques elípticos”:

$$\frac{\acute{A}rea\ menor}{\acute{A}rea\ total} = \frac{Tempo\ menor}{Tempo\ total\ (1)} = \frac{R^2\sqrt{1-e^2}(\arccos e - e\sqrt{1-e^2})}{\pi R^2\sqrt{1-e^2}}$$

$$\frac{T_m}{T} = \frac{\arccos e - e\sqrt{1-e^2}}{\pi}$$

Exemplo 1: Qual a porcentagem do tempo total de órbita do planeta Mercúrio na “área especial 2”? Excentricidade: 0.21 →

$$\frac{\arccos 0{,}21 - 0{,}21\sqrt{1-0{,}21^2}}{\pi} \approx 37\%$$

Conclusões

- Fórmulas:

$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2(1-e^2)} = 1$	Equação alternativa da elipse
$\frac{e}{\pi} + 1/2$	Porcentagem do tempo gasto na “área especial 1”
$\frac{\arccos e - e\sqrt{1-e^2}}{\pi}$	Porcentagem do tempo gasto na “área especial 2”, no setor de área menor • Arco cosseno em radianos • Excentricidade é adimensional

- Sendo a excentricidade igual a 0, **a órbita é uma circunferência.** Assim, o tempo das áreas parciais é igual, 50% do tempo para cada.

Referências

- https://www.britannica.com/science/ellipse
- http://jwilson.coe.uga.edu/emt668/EMAT6680.2003.fall/Drew/Emat6890/Drawing.htm
- Weisstein, Eric W. "Ellipse." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html
- https://science.nasa.gov/resource/orbits-and-keplers-laws/
- https://www.had2know.org/academics/ellipse-segment-tank-volume-calculator.html